

Determinación de sedimentogramas en la presa El Caracol¹

Jesús Gracia Sánchez

Instituto de Ingeniería, UNAM

Se presenta la aplicación del método de los esplines para determinar datos faltantes en registros de concentración de sedimento en suspensión en una corriente. El procedimiento se aplica al caso del Río Balsas en el sitio denominado El Caracol. Se presentan los resultados obtenidos en la época de lluvias del año (1977). Se concluye que el uso del procedimiento empleado permite calcular con gran precisión el aporte de sedimento y los datos faltantes. Hay condiciones especiales en las que se obtienen buenos resultados hasta cuando se carece del 50% de la información.

Al estudiar el problema de sedimentación en la presa El Caracol, se comprobó la necesidad de disponer de los registros de entradas de sedimento al vaso, tanto para cuantificar la magnitud total de material sólido entrante al vaso como para determinar sedimentogramas que permitan simular el comportamiento del material sólido dentro del embalse (Gracia, 1987). Cuando se recabó la información correspondiente, se observó que los registros de las concentraciones de sedimento en suspensión en la corriente de aporte no estaban completos, debido a la falta de mediciones en ciertos días. Ante esta situación, se buscó un procedimiento de interpolación de los datos faltantes, que permitiera hacer una predicción confiable de dichos valores. Para ello, se empleó el método de esplines cúbicos (Mizumura, 1985), y se calculó un registro completo (1977) para verificar la confiabilidad de dicho procedimiento para diversos rangos de datos faltantes.

Método de interpolación

Los esplines cúbicos (Conte y Boor, 1972), definidos en un intervalo $[0, a]$ para un registro diario (d_j) , se pueden determinar subdividiendo el intervalo $[0, a]$, de tal manera que $0 = d_0 < d_1 < d_2 < \dots < d_n = a$, donde para cada valor d_j se conocen los valores de la concentración $[C_j]$. El

problema consiste en determinar una función $C_j = f(d_j)$ que tenga las siguientes propiedades:

- La primera y segunda derivadas de $f(d_j)$ deben ser continuas
- En cada subintervalo, la función $f(d_j)$ es cúbica
- $f(d_j) = C_j$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Dicha función puede ser un espín cúbico (Conte y Boor, 1972), que puede representarse como:

$$C = AC_j + BC_{j+1} + CC_j'' + DC_{j+1}'' \quad (1)$$

siendo:

$$A1 \equiv \frac{d_{j+1} - d}{d_{j+1} - d_j} \quad (2)$$

$$B1 \equiv 1 - A = \frac{d - d_j}{d_{j+1} - d_j} \quad (3)$$

$$C1 \equiv \frac{1}{6}(A^3 - A)(d_{j+1} - d_j)^2 \quad (4)$$

$$D1 \equiv \frac{1}{6}(B^3 - B)(d_{j+1} - d_j)^2 \quad (5)$$

Derivando la ecuación (1) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dd} &= \frac{C_{j+1} - C_j}{d_{j+1} - d_j} - \frac{3A1^2 - 1}{6}(d_{j+1} - d_j)C_j'' + \\ &+ \frac{3B1^2 - 1}{6}(d_{j+1} - d_j)C_{j+1}'' \end{aligned} \quad (6)$$

Derivando nuevamente a (6)

$$\frac{d^2d}{dd^2} = A1C_j'' + B1C_{j+1}'' \quad (7)$$

Nótese que si $d = d_j$ entonces $A1 = 1$ y $B1 = 0$, y que si $d = d_{j+1}$, $A1 = 0$ y $B1 = 1$, lo cual implica que los valores de C'' son los valores de la segunda derivada en cada punto. Para garantizar la continuidad de la función (1) es necesario que la primera derivada (6) sea igual, si se valúa para $d = d_j$ en el intervalo (d_{j-1}, d_j) o en el (d_j, d_{j+1}) , por lo cual evaluando (6) para ambos intervalos se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d_j - d_{j-1}}{6} C_{j-1}'' + \frac{d_{j+1} - d_{j-1}}{3} C_j'' + \frac{d_{j+1} - d_j}{6} C_{j+1}'' = \\ = \frac{C_{j+1} - C_j}{d_{j+1} - d_j} - \frac{C_j - C_{j-1}}{d_j - d_{j-1}} \end{aligned} \quad (8)$$

Dividiendo ambos miembros de (8) entre $(d_{j+1} - d_{j-1})$, se tiene:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d_j - d_{j-1}}{d_{j+1} - d_{j-1}} \right] C_{j-1}'' + 2C_j'' + \left[\frac{d_{j+1} - d_j}{d_{j+1} - d_{j-1}} \right] C_{j+1}'' = \\ = \frac{6}{d_{j+1} - d_{j-1}} \left[\frac{C_{j+1} - C_j}{d_{j+1} - d_j} - \frac{C_j - C_{j-1}}{d_j - d_{j-1}} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Definiendo $\alpha_j = \frac{d_j - d_{j-1}}{d_{j+1} - d_{j-1}}$; $\beta_j = 1 - \alpha_j$ y

$$\gamma_j = \frac{6}{(d_{j+1} - d_{j-1})} \left[\frac{C_{j+1} - C_j}{d_{j+1} - d_j} - \frac{C_j - C_{j-1}}{d_j - d_{j-1}} \right]$$

La ecuación (9) se puede escribir como:

$$\alpha_j C_{j-1}'' + 2C_j'' + \beta_j C_{j+1}'' = \gamma_j \quad (10)$$

En forma desarrollada:

$$\begin{aligned} \alpha_1 C_0'' + 2C_1'' + \beta_1 C_2'' &= \gamma_1 \\ \alpha_2 C_1'' + 2C_2'' + \beta_2 C_3'' &= \gamma_2 \\ \vdots & \\ \alpha_N C_{N-1}'' + 2C_N'' + \beta_N C_{N+1}'' &= \gamma_N \end{aligned}$$

Nótese que es un sistema de N ecuaciones con $N+2$ incógnitas, pero como se conocen las condiciones de frontera y ahí se puede establecer que $C_0'' = C_{N+1}'' = 0$, el sistema (11) puede establecerse con igual número de ecuaciones que de incógnitas. La matriz de coeficientes es

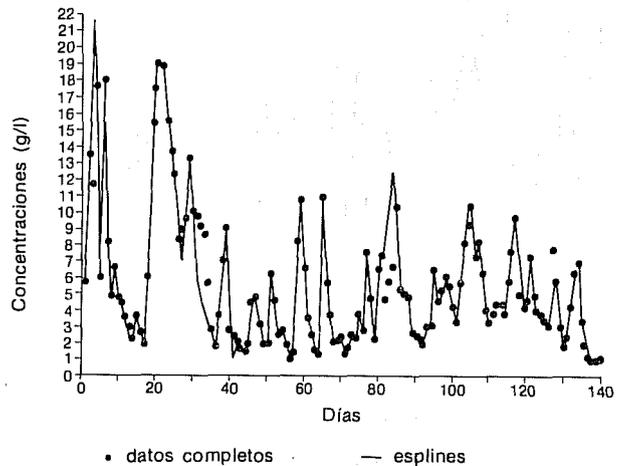
tridiagonal, con solución única y puede resolverse por el método de Gauss. Para los ejemplos que se presentan enseguida, se elaboró un programa en Basic para una computadora personal; en él se manejaron 184 datos.

Aplicación al registro de la estación El Caracol

En el registro empleado de mayo a diciembre de 1977 (CFE, 1977) de la estación El Caracol, se observó que hacían falta mediciones en el 20% de los días, por lo cual el primer objetivo fue simular dicho registro. En la ilustración 1, se muestra el resultado de la interpolación realizada con esplines para 140 días del registro incompleto. En la misma ilustración se incluye el registro completo, determinado con datos de estaciones cercanas. Como puede observarse existe una gran similitud entre ambos. A continuación se muestran los resultados del cálculo del aporte de sedimento, de la media y de la varianza de los registros de concentraciones.

1. Sedimentogramas (El Caracol)

80% de la información



	Transporte de sedimento (ton)	varianza σ^2	media μ
--	-------------------------------	---------------------	-------------

Registro completo	2.069×10^7	16.044	4.529
Esplines cúbicos (información disponible al 80%)	2.051×10^7	17.905	4.596

Para establecer si el cambio de la media y la varianza eran significativas se determinó el intervalo

de confianza al nivel del 95% (Miller y Freund, 1986) y se obtuvo que:

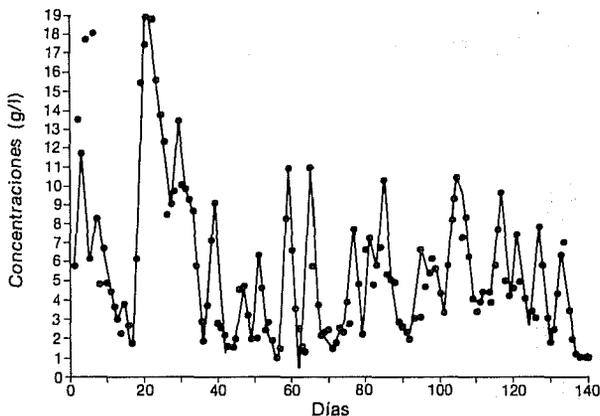
$$3.95 < \mu < 5.1$$

$$13.17 < \sigma^2 < 10.9$$

De donde concluye que la media y la varianza del registro ajustado con esplines están dentro de los límites anteriores. En otras palabras, las diferencias no son significativas. Adicionalmente, se determinó la bondad de las interpolaciones para otros niveles de información disponibles. Por ejemplo, en el caso de disponer sólo de la mitad de la información, supóngase que el muestreo de concentraciones se hace en días alternados. En la ilustración 2 se muestra la interpolación realizada y abajo, la comparación de los parámetros estadísticos.

2. Sedimentogramas (El Caracol)

50% de la información



• Datos completos — esplines

Media = 4.612
 Varianza = 15.002
 Sedimento = 2.05×10^7 ton.

Como se puede observar, la interpolación también es satisfactoria y los resultados obtenidos también indican que no existe una diferencia significativa al nivel de confianza del 95%. Si todo el material transportado se depositara en el vaso con una $\rho = 1.12 \text{ ton/m}^3$, el volumen ocupado sería de $18.3 \times 10^6 \text{ m}^3$.

Por último, es importante hacer notar, que el resultado anterior, cuando se usó el 50% de la información, es satisfactorio, porque se ha

supuesto que dicha información se tiene en días alternados. Sin embargo, si se dispusiera del 50% de la información pero en días al azar, los resultados no siempre serían satisfactorios y en algunos casos, las diferencias pueden ser altamente significativas. Para ilustrar esto, en el cuadro 1 se muestran los resultados de 13 interpolaciones realizadas con el 50% de la información, pero escogiendo los días sin información de una muestra de números aleatorios. Como puede observarse, sólo en el 70% de los casos la información es confiable. Uno de los casos más desfavorables se muestra en la ilustración 3, correspondiente a la interpolación número 5 con varianza de 11.51, y que fue una de las más alejadas del valor medio.

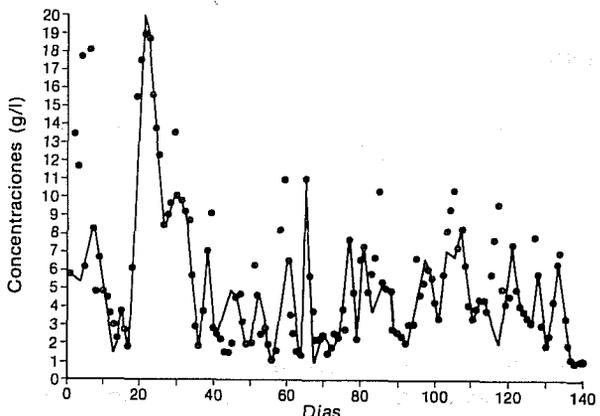
1. interpolaciones con el 50% de la información

Concentraciones (g/l)

Interpolación	Media μ	Varianza σ^2	Diferencia Significativa (95%)
1	4.35	17.15	NO
2	4.63	15.88	NO
3	4.55	16.95	NO
4	4.57	14.47	NO
5	4.06	11.51	SI
6	4.39	12.19	SI
7	4.96	19.40	NO
8	4.26	16.79	NO
9	4.92	17.79	NO
10	4.68	17.76	NO
11	4.60	14.55	NO
12	3.97	11.31	SI
13	4.39	12.18	SI

3. Sedimentogramas (El Caracol)

50% de la información al azar



• Datos completos — esplines

Los resultados anteriores evidencian que una ventaja adicional del empleo del método de los

esplines para la interpolación, es que permite planear los muestreos en campo para que éstos sean mínimos y la información siga siendo confiable.

Conclusiones

El método de interpolación empleado permite generar registros de sedimentogramas confiables, cuando los registros son incompletos. En el caso de la estación El Caracol, para registros carentes del 20% de la información, el error en la estimación de sedimento, no es significativo (<1%). Aun en registros con el 50% de la información, la estimación también puede ser satisfactoria, aunque en ello influye que la carencia de información sea o no aleatoria.

Nomenclatura

- j Índice para los días
- d_j día
- C_j concentración (g/l)
- $A_1, B_1,$
- C_1, D_1 coeficientes de la función esplín
- C'' segunda derivada

N número total de días

α, β, γ coeficientes de la matriz tridiagonal

σ^2 varianza

μ media

γ peso específico (ton/m³)

Referencias

- Conte, S.D. y Boor C. de. *Análisis numérico*, Mc. Graw-Hill, México, 1972.
- CFE. "Datos de Azolves", Depto. de Planeación y Estudios, Oficina de Estudios Civiles, Sección de Hidrología, 1977.
- Gracia S. J. "Estudio experimental del comportamiento del material en suspensión dentro de un embalse", Informe a la CFE del Instituto de Ingeniería, UNAM, 1987, 216 pp.
- Miller, I. y Freund, J.E. *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*, Prentice Hall, México, 1986.
- Mizumura K. "Estimation of Hydraulic Data by Spline Functions", *Journal of Hydraulic Division*, ASCE Vol. III, No. 9, 1985, pp. 1219-1125.

¹ El autor agradece al Departamento de Planeación y Estudios, Oficina de Estudios Civiles, Sección de Hidrología de la CFE por su cooperación en la adquisición de datos.